Tensor $\vec{f}(\vec{0}) = \vec{0}$

liniowa jednorodna funkcja: wektor $\rightarrow$ wektor ***b=f(a)***

$$\vec{f}(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}) = \alpha\vec{f}(\vec{a}) + \beta\vec{f}(\vec{b})$$

*W danym układzie współrzędnych **i,j,k** - tensor jako macierz*

$$\vec{f}(a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}) = a_x\vec{f}(\hat{i}) + a_y\vec{f}(\hat{j}) + a_z\vec{f}(\hat{k})$$

ale

$$a_x\vec{f}(\hat{i}) = a_x[\hat{i}f_x(\hat{i}) + \hat{j}f_y(\hat{i}) + \hat{k}f_z(\hat{i})]$$

$$a_y\vec{f}(\hat{j}) = a_y[\hat{i}f_x(\hat{j}) + \hat{j}f_y(\hat{j}) + \hat{k}f_z(\hat{j})]$$

$$a_z\vec{f}(\hat{k}) = a_z[\hat{i}f_x(\hat{k}) + \hat{j}f_y(\hat{k}) + \hat{k}f_z(\hat{k})]$$

Równanie ***b=f(a)*** *można więc zapisać w postaci*

$$\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

Zapis $\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ jest równoważny zapisowi

$$b_x = T_{xx}a_x + T_{xy}a_y + T_{xz}a_z$$
$$b_y = T_{yx}a_x + T_{yy}a_y + T_{yz}a_z$$
$$b_z = T_{zx}a_x + T_{zy}a_y + T_{zz}a_z$$

a także zapisowi

$$\vec{b} = \tilde{T}\vec{a} = \hat{i}(T_{xx}a_x + T_{xy}a_y + T_{xz}a_z) +$$
$$+ \hat{j}(T_{yx}a_x + T_{yy}a_y + T_{yz}a_z) + \hat{k}(T_{zx}a_x + T_{zy}a_y + T_{zz}a_z)$$

$T_{mr} = f_m(\hat{c}_r)$ jest *m*-tą składową funkcji ***f*** działającej na *r*-ty wersor

Przykłady: moment pędu,   prawo Hooke'a

Symetria tensora

$$T_{mr} = T_{rm}$$ tensor symetryczny – 6 niezależnych składowych

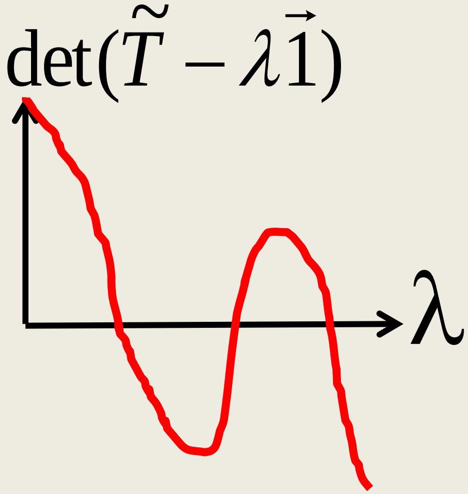
$$T_{mr} = -T_{rm}$$ tensor antysymetryczny – 3 niezależne składowe

Równanie własne

Szczególny przypadek: $\vec{b} \| \vec{a}$ czyli $\tilde{T}\vec{a} = \lambda\vec{a}$ - równanie własne operatora $\tilde{T}$

Rozwiązaniem jest ***a***=0, chyba że $\det(\tilde{T} - \lambda\vec{1}) = 0$ - równanie na liczby λ

$$\det\begin{pmatrix} T_{xx} - \lambda & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} - \lambda & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} - \lambda \end{pmatrix} = 0$$



Dla macierzy symetrycznej wszystkie pierwiastki są rzeczywiste.

Ślad macierzy T, TrT

$$
\begin{aligned}
&-\lambda^3+\lambda^2\underline{(T_{xx}+T_{yy}+T_{zz})}-\\
&-\lambda(T_{xx}T_{yy}-T_{xy}T_{yx}+T_{yy}T_{zz}-T_{yz}T_{zy}+T_{zz}T_{xx}-T_{zx}T_{xz})+\\
&+\det T=0
\end{aligned}
\qquad (\&)
$$

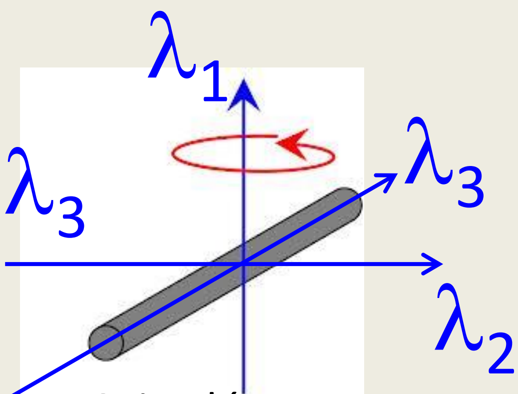
Z drugiej strony, zapisując równanie 3-go stopnia w formie zależnej od jego rozwiązań $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ mamy

$$-(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)=0$$

$$-\lambda^3+\lambda^2(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)-\lambda(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1)+\lambda_1\lambda_2\lambda_3=0$$

Ponieważ pierwiastki rozwiązania $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ nie zależą od układu współrzędnych, więc współczynniki w równaniu (&) też nie zależą od układu.

$\lambda_1=\lambda_2>\lambda_3$

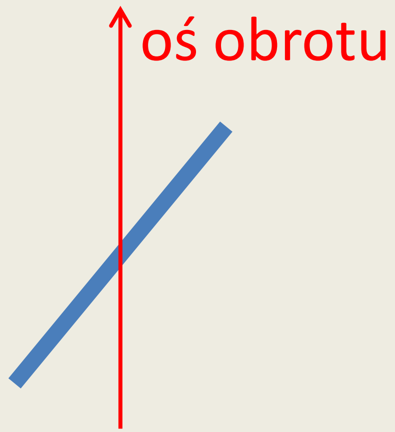


Osie główne pręta

Przykład: moment pędu

Przykład: moment bezwładności dla b. cienkiego pręta

Załóżmy, że dla danej orientacji pręta



$$\tilde{I} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

gdzie $[I_{ij}]$=m²kg. Równanie własne ma postać

$$\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(2-\lambda)^3 - 2 - 3(2-\lambda) = 0$$

$$-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda = 0$$

λ=0,3,3

Istnieje układ współrzędnych o takiej orientacji, że tensor $\tilde{I}$ jest macierzą diagonalną. Jest to tzw. układ osi głównych. Jak skierowane są te osie?

Są to rozwiązania równania własnego, tzw. wektory własne, po jednym dla każdej λ:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$\lambda = 0$

$$2a - b - c = 0$$

$$-a + 2b - c = 0$$

a=b=c

$$v(\lambda = 0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Oś skierowana pod jednakowym kątem do OX, Oy, OZ. Tu: oś pręta

$\lambda = 3$

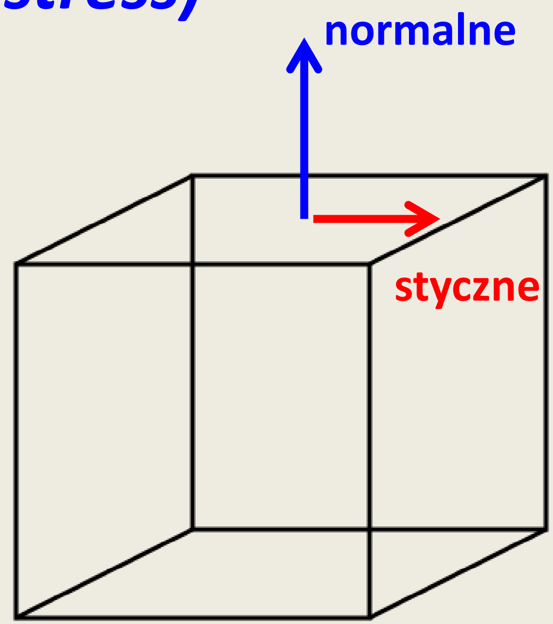
$$-a - b - c = 0$$

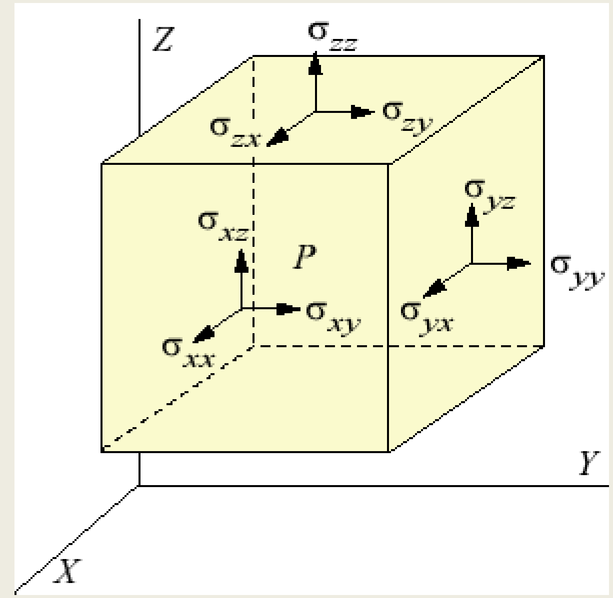
$$v(\lambda = 3) = \begin{pmatrix} -b - c \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Dwie osie skierowane pod kątem prostym do v(λ=0).

Tensor naprężeń (stress)

Element
objętości
ośrodka
ciągłego





W każdym punkcie ośrodka ***r*** możemy wydzielić element objętości.
Każdemu kierunkowi normalnej do powierzchni odpowiada siła działająca na tę powierzchnię.

$$d\vec{S} = (dS_x, dS_y, dS_z)$$

wektor powierzchni, normalny (=prostopadły) do powierzchni, o długości równej polu powierzchni

Wygodnie jest odróżnić składowe siły wzdłuż ***dS*** i działające stycznie: $d\vec{F} = d\vec{F}_n + d\vec{F}_s$

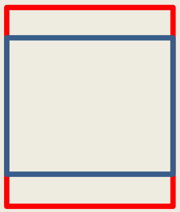
Tensor naprężeń $\tilde{\sigma}$ $\boxed{d\vec{F} = \tilde{\sigma} d\vec{S}}$ czyli $dF_i = \sum_j \sigma_{ij} dS_j$ czyli $dF_i = \sigma_{ij} dS_j$

Uwaga: tensor naprężeń jest symetryczny, bo suma momentów sił =0

Najprostsze stany naprężeń jednorodnych

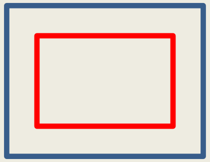
$$\tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix}$$

Rozciąganie (σ>0) lub ściskanie (σ<0) wzdłuż osi OZ



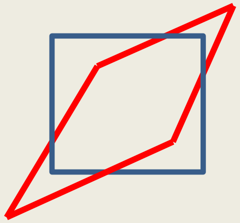
$$\tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix}$$

Ciśnienie hydrostatyczne (σ<0)



$$\tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma & 0 \\ \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ścinanie proste w płaszczyźnie XY



Przykład: załóżmy, że dla danej orientacji elementu objętości składowe tensora $\tilde{\sigma}$ są

$$\tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Istnieje taka orientacja układu współrzędnych, że tensor $\tilde{\sigma}$ jest diagonalny.
Wartości własne znajdujemy z równania sekularnego

$$\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(2-\lambda)^3 + 2 - 3(2-\lambda) = 0$$

$$\boxed{\lambda_1 = 1}$$

$$-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda + 4 = 0$$

$$(-\lambda+1)(a\lambda^2 + b\lambda + c) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda + 4$$

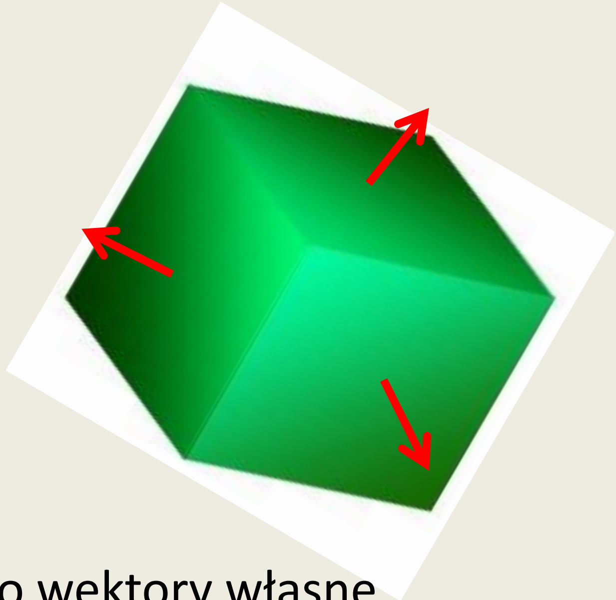
$$a = 1, c = 4, b = -5$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$$

$$\boxed{\lambda_2 = 1} \quad \boxed{\lambda_3 = 4}$$

W wyróżnionym układzie współrzędnych tylko siły normalne do powierzchni są różne od zera.

$$\tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$



Naprężenia ścinające są równe zero.

Jak znaleźć kierunki tych osi? Są to wektory własne.
Przykład: znajdowanie wektora własnego dla λ = 4.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$2a + b - c = 4a$$

$$a + 2b - c = 4b$$

Zakładając c=1, mamy a=b=-1.
Szukany wektor własny jest

$$\vec{v}(\lambda = 4) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tensor odkształceń (strain)

Odkształcenie = zmiana wzajemnej odległości punktów ośrodka.

Dwa sąsiednie punkty ośrodka ***P***, ***Q*** po odkształceniu => ***P'***, ***Q'***

$$\overrightarrow{PQ} = d\vec{r} \quad \Rightarrow \overrightarrow{P'Q'} = d\vec{r}\,' = d\vec{r} + d\vec{\rho} = d\vec{r} + (d\xi, d\eta, d\varsigma)$$

Tensor odkształceń $\tilde{T}$:

ksi, eta, dzeta

$$d\vec{\rho} = \tilde{T} d\vec{r}$$

czyli $$d\rho_i = \sum_j T_{ij} dr_j$$

czyli $$d\rho_i = T_{ij} dr_j$$

$$\tilde{T} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \xi}{\partial z} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial z} \\ \frac{\partial \varsigma}{\partial x} & \frac{\partial \varsigma}{\partial y} & \frac{\partial \varsigma}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Każdy tensor można przedstawić w postaci sumy części symetrycznej i części antysymetrycznej:

$$
\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix} =
$$

$$
= \begin{pmatrix} a & (b+d)/2 & (c+g)/2 \\ (b+d)/2 & e & (f+h)/2 \\ (c+g)/2 & (f+h)/2 & j \end{pmatrix} +
$$

$$
+ \begin{pmatrix} 0 & (b-d)/2 & (c-g)/2 \\ (d-b)/2 & 0 & (f-h)/2 \\ (g-c)/2 & (h-f)/2 & 0 \end{pmatrix}
$$

Małe przesunięcie elementu ośrodka ciągłego składa się z:

- translacji (nie daje wkładu do $\boldsymbol{d\rho}$)
- obrotu (część antysymetryczna tensora odkształceń)
- deformacji (część symetryczna tensora odkształceń)

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2\frac{\partial\xi}{\partial x} & \frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial\eta}{\partial x} & \frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\partial\varsigma}{\partial x} \\ \frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial\eta}{\partial x} & 2\frac{\partial\eta}{\partial y} & \frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\partial\varsigma}{\partial y} \\ \frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\partial\varsigma}{\partial x} & \frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\partial\varsigma}{\partial y} & 2\frac{\partial\varsigma}{\partial z} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \gamma_z & \gamma_y \\ \gamma_z & \varepsilon_y & \gamma_x \\ \gamma_y & \gamma_x & \varepsilon_z \end{pmatrix}$$

Zawsze istnieje lokalny układ współrzędnych (układ osi głównych), w którym $\gamma_x = \gamma_y = \gamma_z = 0$.

Odkształcenia jednorodne: deformacja nie zależy od $\boldsymbol{r}$.

Przykład: odkształcenie objętości

$$d\vec{r}' = d\vec{r} + d\vec{\rho} = d\vec{r} + (d\xi, d\eta, d\varsigma)$$

$$dx' = dx + d\xi = dx + \varepsilon_x dx = (1 + \varepsilon_x) dx$$

$$dy' = dy + d\eta = dy + \varepsilon_y dy = (1 + \varepsilon_y) dy$$

$$dz' = dz + d\varsigma = dz + \varepsilon_z dz = (1 + \varepsilon_z) dz$$

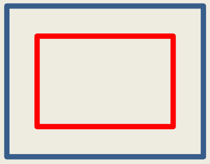
$$dV' - dV = dx' dy' dz' - dxdydz \approx$$

$$\approx (1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) dxdydz - dxdydz$$

Względna zmiana objętości

$$(dV' - dV) / dV \equiv \omega = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

Jeżeli kształt się nie zmienia, to $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z$



Wniosek: objętość zależy tylko od ω.

Wniosek: W układzie osi głównych każde odkształcenie można przedstawić jako sumę zmiany objętości i zmiany kształtu:

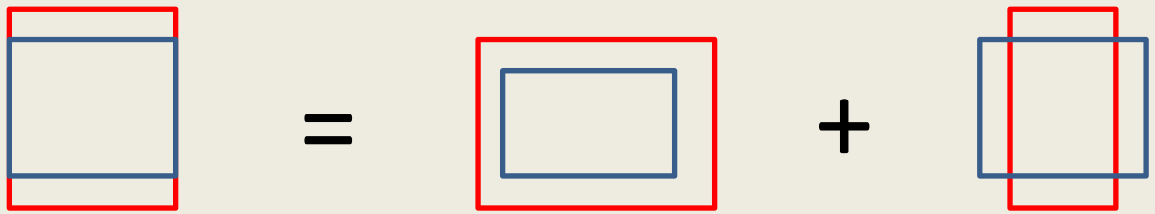
$$\varepsilon_x = \omega/3 + \varepsilon_x'$$

$$\varepsilon_y = \omega/3 + \varepsilon_y'$$

$$\varepsilon_z = \omega/3 + \varepsilon_z'$$

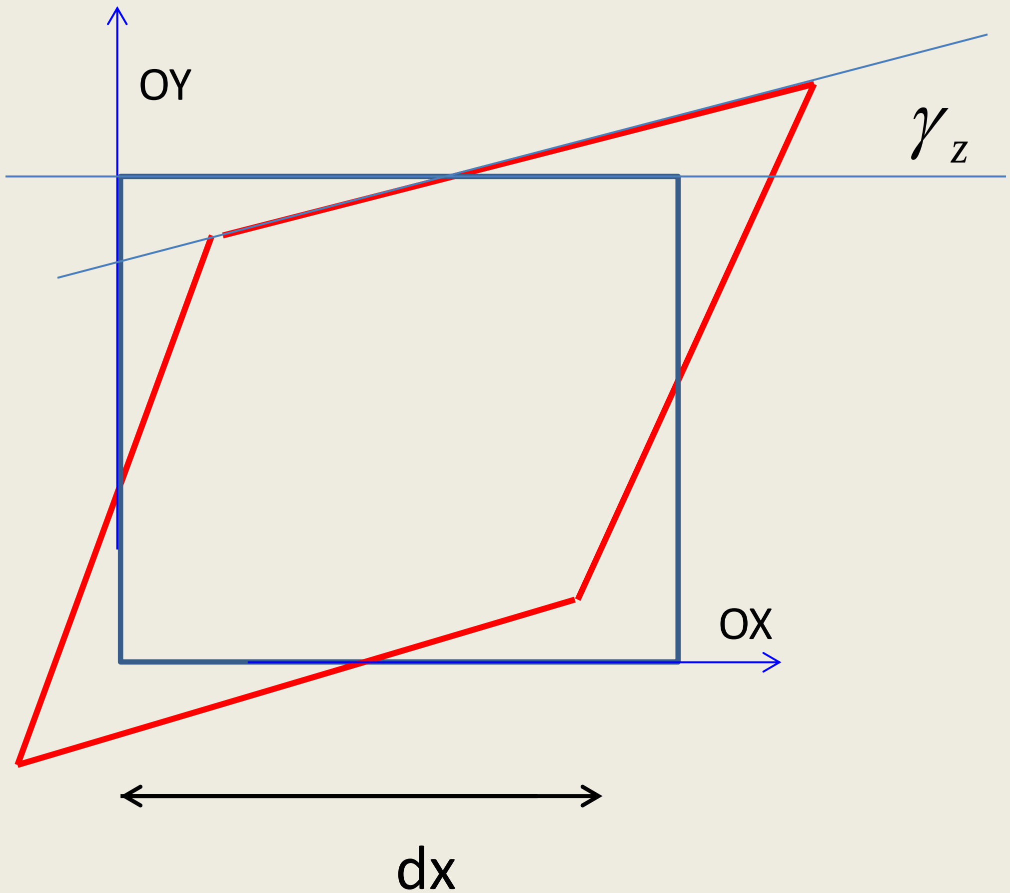
gdzie $\omega = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$

ponieważ $\varepsilon_x' + \varepsilon_y' + \varepsilon_z' = 0$.



Odkształcenie postaci

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_z & 0 \\ \gamma_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$d\xi = \gamma_z dy$$

$$d\eta = \gamma_z dx$$

$$d\varsigma = 0$$

Teoria sprężystości - najprostszy przykład :

Energia potencjalna oscylatora harmonicznego (np. masa na sprężynie) w pobliżu położenia równowagi x_0 może być rozwinięta w szereg Taylora

$$U(x) = U(x_0) + b(x - x_0) + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2 + \ldots$$

Siła którą sprężyna działa na oscylator $F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}$

W położeniu równowagi siła równa się zeru, ale $F(x_0) = -b$ więc b=0 .

Przyłożona siła zewnętrzna F_z prowadzi do takiego wychylenia z położenia równowagi, aby siły równoważyły się:

$$F_z - \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2}k(x - x_0)^2\right] = 0$$

czyli

$$x - x_0 = \frac{1}{k}F_z$$

Teoria sprężystości - ogólniej

W przypadku odkształceń doskonale sprężystych odkształcenie jest liniową funkcją naprężeń.

Prawo Hooke'a $$\varepsilon_{ij} = \sum_{kl} S_{ijkl}\sigma_{kl} \quad \text{czyli} \quad \varepsilon_{ij} = S_{ijkl}\sigma_{kl}$$

podatność sprężysta (*compliance*)
– tensor 4-go rzędu

Można też napisać $$\sigma_{ij} = \sum_{kl} C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad \text{czyli} \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$$

sztywność (*stiffness*)
– tensor 4-go rzędu

Prawo Hooke'a można wyrazić przez tensory 2-go rzędu, jeśli tensor naprężeń i tensor odkształceń przedstawimy w postaci wektorów.

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ 2\gamma_x \\ 2\gamma_y \\ 2\gamma_z \end{pmatrix}$$

W ogólnym przypadku tensor C ma 21 niezależnych składowych.

Dla ciał izotropowych zostają tylko dwie składowe:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda+2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ 2\gamma_x \\ 2\gamma_y \\ 2\gamma_z \end{pmatrix}$$

gdzie λ, μ są znane jako tzw. współczynniki Lamégo.

Moduł Younga

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$$

Stała Poissona

$$\sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

Stałe E, σ możemy zmierzyć np. rozciągając pręt wzdłuż osi OX. Jeżeli jedyna różna od zera składowa naprężenia w ośrodku izotropowym jest σ_{11}, to mamy prawo oczekiwać że $\varepsilon_z = \varepsilon_y$.

Z prawa Hooke'a

$$\sigma_{11} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_x + 2\lambda\varepsilon_y$$

$$0 = \lambda\varepsilon_x + 2(\lambda + \mu)\varepsilon_y$$

co daje $$\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = -\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \qquad \varepsilon_x = \frac{\lambda+\mu}{\mu(2\mu+3\lambda)}\sigma_{11}$$

Porównując to z wzorami doświadczalnymi

$$\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = -\sigma \qquad \frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{E}\frac{F}{S}$$

otrzymujemy związki E i σ z λ i μ.